



PII: S0017-9310(96)00230-X

Instabilité thermo-convective dans un cylindre avec source volumique de chaleur

K. F. WU

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée, CNRS, URA 875, 2, Avenue de la Forêt de Haye, B.P. 160, 54504 Vandoeuvre les Nancy Cedex, France

H. COMBEAU

Laboratoire de Science et Génie des Matériaux Métalliques, CNRS, URA 159 Parc de Saurupt 54042 Nancy Cedex, France

et

J. P. BRANCHER

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée, CNRS, URA 875 Avenue de la Forêt de Haye, B.P. 160, 54504 Vandoeuvre les Nancy Cedex, France

(Reçu 2 novembre 1994 et sous forme finale 24 juin 1996)

Résumé—La convection thermique d'un fluide à nombre de Rayleigh nul induite par une source de chaleur interne dans un cylindre confiné est étudiée numériquement. L'analyse du transfert de chaleur et de la stabilité du régime conductif entre deux plans permet de prévoir l'apparition de la convection. Le nombre de Rayleigh modifié critique déterminé numériquement pour un grand rapport d'aspect est en bon accord avec l'étude analytique linéaire de la couche infinie. La perturbation introduite par une petite inclinaison du cylindre pour l'étude numérique de l'instabilité conduit aux mêmes résultats qu'une perturbation de la vitesse imposée dans le cas linéaire. La stabilisation due au confinement se manifeste fortement pour les rapports d'aspect inférieurs à 0,5. Copyright © 1996 Elsevier Science Ltd.

1. INTRODUCTION

Dans l'électrode de sole d'un four à courant continu, l'acier liquide est soumis à un brassage électromagnétique dans les zones où la densité de courant n'est pas uniforme. Les courants électriques et le champ magnétique qu'ils créent font apparaître des efforts volumiques (forces de Laplace) dont le rotationnel n'est pas nul et qui donc vont être le moteur du brassage. Dans la partie centrale du puits cylindrique, la densité de courant est uniforme car les parois sont isolantes. De ce fait il n'y a pas de brassage électromagnétique. Il n'y aurait pas non plus de mouvement convectif thermique puisque les parois sont adiabatiques et que la température supérieure est plus grande que la température inférieure. Cependant le liquide est le siège de dissipation par effet Joule. La source de chaleur volumique j^2/σ (où j est la densité de courant et σ la conductivité électrique) est relativement importante car le courant total qui traverse la section de diamètre D de l'ordre de quelque 10 cm est d'environ quelques dizaines de milliers d'Ampère. En régime purement conductif le profil de température

est parabolique et l'on atteindrait des températures de plusieurs milliers de degrés : ce qui n'est évidemment pas le cas pour les fours actuellement en fonctionnement. On définit ici un problème heuristique dans une configuration simplifiée.

L'étude proposée concerne le problème des instabilités convectives à nombre de Rayleigh nul voire négatif et avec source de chaleur interne. Ce problème a été abordé par les géophysiciens pour étudier la convection naturelle dans le manteau terrestre dans le cas d'une couche horizontale entre 2 plans parallèles avec une source interne uniforme et la méthode semi-analytique utilisée est basée sur la théorie linéaire et faiblement non linéaire des instabilités convectives [1-3].

Nous abordons ici le cas de la cavité cylindrique par un calcul direct de l'écoulement utilisant un code axisymétrique laminaire [4]. Après une validation sur le cas de la couche horizontale relativement aux résultats obtenus dans les refs. [1, 7, 10], le code est utilisé pour la configuration cylindrique. Cependant, il a été démontré dans la thèse, ref. [12] que pour les faibles rapports d'aspect, comme dans le cas sans source interne, le mode non axisymétrique d'ordre $n = 1$ était

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla P + \rho_1 \mathbf{g} (1 - \beta(T - T_1)) + \mu \nabla \nabla \mathbf{V} \quad (3)$$

avec

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4)$$

où μ est la viscosité dynamique, P est la pression, β le coefficient de dilatation volumique, ρ_1 la masse volumique à température T_1 . Il est clair qu'en régime conductif pur, on obtient comme solution de base :

$$V_0 = 0 \quad (5)$$

$$T_0(z) = -\frac{s}{2\lambda} z^2 + \frac{\frac{s}{2\lambda} H^2 - \delta T}{H} z + T_1 + \delta T \quad (6)$$

$$P_0(z) = P_1 - \rho_1 \mathbf{g} \int_0^z [1 - \beta(T_0(z) - T_1)] dz \quad (7)$$

C'est la stabilité de cette solution de base que nous voulons étudier.

3. PROPRIÉTÉ DU RÉGIME CONDUCTIF

En régime établi permanent, il est intéressant de préciser rapidement de quelle manière se fait le transfert de chaleur. Si k est la conductivité thermique, en prenant comme convention de compter positivement les flux sortant du cylindre, le flux de chaleur partant vers le haut est :

$$\phi_h = k\pi R^2 \left(\frac{s}{2\lambda} H + \frac{\delta T}{H} \right) \quad (8)$$

Le flux partant vers le bas est :

$$\phi_b = k\pi R^2 \left(\frac{s}{2\lambda} H - \frac{\delta T}{H} \right) \quad (9)$$

Dans une électrode de sole δT est négatif ($\cong -100$ K). Ainsi :

$$\phi_b > 0 \quad (10)$$

$$\phi_h > 0 \quad \text{si } s > \frac{2\lambda |\delta T|}{H^2} \quad (11)$$

$$\phi_h < 0 \quad \text{si } s < \frac{2\lambda |\delta T|}{H^2} \quad (12)$$

on a toujours $\phi_h < \phi_b$.

On peut schématiser le transfert de la chaleur de la manière de la Fig. 2. Le cas $s = (2\lambda |\delta T|)/H^2$ donne la condition $(sH^2)/(2\lambda |\delta T|) = 1$ ou $Ns = 1$ en posant :

$$Ns = \frac{sH^2}{2\lambda |\delta T|} \quad (13)$$

Ns est un paramètre adimensionnel qui jouera un rôle aussi important que le nombre de Rayleigh dans le problème de stabilité. Lorsque Ns est grand, le maximum de température est atteint au centre ($z = H/2$) avec $T_m \cong T_1 + sH^2/8\lambda$. Dans le cas réel : on a $s \cong 0,2 \text{ K s}^{-1}$, $\lambda \cong 6.10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, pour $H \cong 1 \text{ m}$, $\delta T = -100 \text{ K}$, $T_1 \cong 1923 \text{ K}$, $Ns \cong 160$, on obtiendrait en conduction pure des températures de l'ordre de 6000 K. Par ailleurs, en revenant au problème industriel, on n'atteindrait jamais le régime permanent puisque le temps caractéristique de diffusion $t_d \cong H^2/\lambda \cong 45 \text{ h}$, alors que le four travaille avec des cycles de fusion beaucoup plus courts.

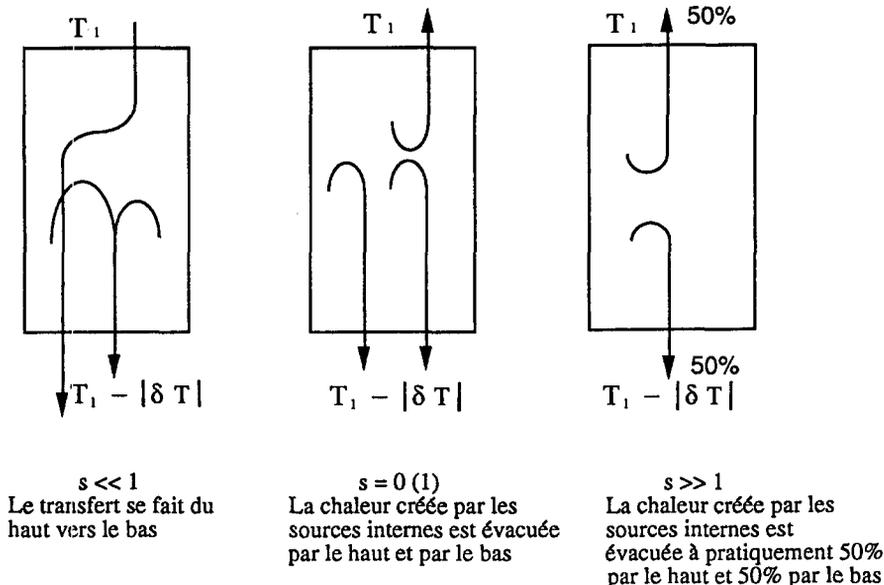


Fig. 2. Schéma du transfert de chaleur en régime conductif.

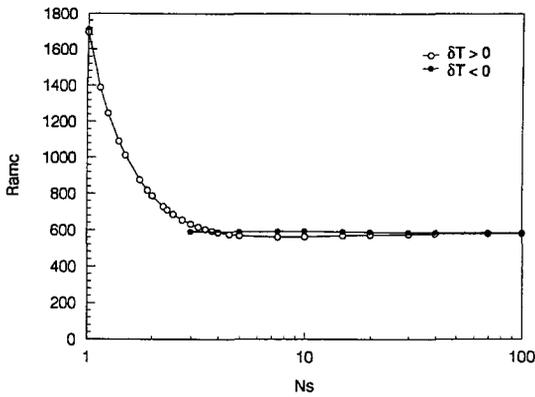


Fig. 3. Nombre de Rayleigh modifié critique en fonction de Ns .

4. STABILITÉ DU RÉGIME CONDUCTIF

Lorsque Ns est grand, le nombre de Rayleigh $Ra = (g\beta H^3 \delta T) / (\nu \lambda)$ (où ν est la viscosité cinématique) n'est plus un paramètre significatif de transition. On définit alors le nombre de Rayleigh modifié :

$$Ram = \frac{g\beta(H-z_m)^3(T_m-T_1)}{\nu\lambda} \quad (14)$$

(z_m est la coordonnée axiale où la température est maximale égale à T_m)

$$\text{soit avec } Ns \gg 1. \quad Ram = \frac{g\beta_s H^5}{64\nu\lambda^2}. \quad (15)$$

Ce nombre a déjà été défini en ref. [1, 3] dans le cadre d'une étude linéaire et faiblement non linéaire de la transition pour le cas d'une couche plane infinie. Dans cette configuration, pour des conditions aux surfaces $z = 0$ et $z = H$ de type rigide-rigide ($V = 0$) pour Ns grand (de l'ordre de 100), la transition apparaît pour $Ram = Ramc \cong 581$ (en conformité avec l'étude linéaire). Pour des Ns plus petits, il faut distinguer les cas où δT est positif ou négatif (voir Fig. 3).

Remarque: en fonctionnement normal, l'électrode de sole se trouve dans des conditions où $Ram = 8,5 \cdot 10^{10} \gg Ramc$. Bien que le confinement entre les parois a un effet stabilisant, si on se réfère à l'étude de refs. [5-6] en cavité cylindrique sans source, il semble clair que nous nous trouvons loin de la première transition, où le mode axisymétrique n'est plus caractéristique et que la transition vers la turbulence a déjà été effectuée. Ici, nous n'abordons pas ce problème, nous nous intéressons uniquement à la première transition. L'étude de la stabilité de l'équilibre avec source en configuration cylindrique est traitée par une simulation directe. Dans notre cas, cette approche est intéressante dans la mesure où les méthodes analytiques sont difficiles à mettre en oeuvre. Par ailleurs, les simulations directes donnent de bons résultats notamment pour le problème voisin de Rayleigh Bénard entre plans parallèles. L'étude est limitée aux modes axisymétriques qui ne sont pas forcément

les moins stables, mais qui permettent d'avoir une estimation par excès du Rayleigh critique pour Ns donné. En effet dans la ref. [5] et la ref. [6] pour le cas sans source, le mode axisymétrique n'est pas le plus instable, mais les seuils de stabilité pour les autres modes sont relativement proches.

5. ETUDE NUMÉRIQUE

5.1. Principe de la méthode de détection du seuil de déclenchement de l'instabilité

Un code de calcul développé sur les bases de la méthode des volumes finis [4] a été mis en oeuvre pour résoudre le système d'équations aux dérivées partielles couplées (2), (3), (4). C'est un code de calcul laminaire traitant des problèmes bidimensionnels pour des géométries droites ou axisymétriques. Tous les calculs ont été effectués avec un fluide dont les propriétés thermophysiques sont reportées dans le Tableau 1. Les tailles des maillages, ainsi que les pas de temps employés pour les différents rapports d'aspect sont reportés dans le Tableau 2. Une étude de sensibilité sur la taille du maillage ainsi que sur le pas de temps a été menée de façon à s'assurer de l'indépendance de nos résultats vis à vis de ces deux paramètres.

Pour étudier le seuil de déclenchement de l'instabilité, les résultats présentés dans la littérature [7-9] sont obtenus en partant de la solution de base comme solution initiale et en perturbant le champ des vitesses ou de température de cette solution. Dans la présente étude, la solution de base est prise également comme solution initiale et on incline la cavité d'un angle très faible (de l'ordre de 10^{-4} rad) par rapport à la verticale. Ceci constitue un essai réalisable physiquement et non pas un essai purement numérique où la perturbation par exemple naît de la méthode de pénalisation utilisée. Dans le cas stable, l'écoulement va converger vers la solution de la cavité faiblement inclinée. Dans le cas instable, la vitesse va augmenter et le régime qui s'établit est caractéristique de la convection pour la cavité horizontale (en inclinaison nulle). Lorsqu'on se trouve légèrement au-dessous des conditions critiques, il est difficile de détecter l'instabilité si on est dans le cas d'une bifurcation surcritique, car l'intensité de l'écoulement stable tend vers zéro lorsqu'on se rapproche de la condition critique. C'est pourquoi il est nécessaire d'établir un critère précis de déclenchement de l'instabilité. Sur la Fig. 4 le nombre de Reynolds maximum ($Rem = V_m H / \nu$ où V_m est la vitesse maximale), ainsi que les nombres de Nusselt haut et bas obtenus pour le régime établi sont représentés en fonction du nombre de Rayleigh modifié. Les résultats correspondent à une cellule ayant un rapport d'aspect égal à 1. La Fig. 5 représente le temps d'établissement du régime permanent en fonction du nombre de Rayleigh modifié. Sur la Fig. 4 on peut remarquer qu'à partir d'un nombre de Rayleigh modifié de 613, le nombre de Reynolds maximum augmente. Le point correspondant au nombre de Ray-

Tableau 1. Les valeurs des grandeurs physiques utilisées dans le calcul numérique

| Nomenclature | Symbole | Unité | Valeur |
|--|-----------|----------------------|-------------------------|
| Chaleur massique | C | $J\ kg^{-1}\ K^{-1}$ | 715 |
| Conductivité thermique | k | $W\ m^{-1}\ K^{-1}$ | 30 |
| Coefficient de diffusion thermique | λ | $m^2\ s^{-1}$ | $5,9 \times 10^{-6}$ |
| Viscosité cinématique | ν | $m^2\ s^{-1}$ | $5,9 \times 10^{-7}$ |
| Coefficient de dilatation volumique | β | K^{-1} | $-8,853 \times 10^{-5}$ |
| Masse volumique | ρ | $kg\ m^{-3}$ | $0,706 \times 10^4$ |
| Module de l'accélération de la pesanteur | g | $m\ s^{-2}$ | 9,8 |
| Hauteur | H | m | 0,01 |
| Température en haut | T_1 | $^{\circ}C$ | 1650 |

Tableau 2. Nombre de Rayleigh modifié critique et maillage utilisé pour différents rapports d'aspect†

| Rapport d'aspect A | Maillage nombre de mailles sur le rayon \times nombre de mailles sur la hauteur Pas de temps = 0,1 | Nombre de Rayleigh modifié critique $Ramc$ |
|-------------------------|---|---|
| 0,2 | 10 \times 20 | 20 148,70 |
| 0,25 | 10 \times 18 | 9787,74 |
| 0,35 | 12 \times 18 | 5616,92 |
| 0,5 | 10 \times 20 | 1510,09 |
| 0,6 | 10 \times 16 | 1053,03 |
| 0,75 | 10 \times 15 | 768,87 |
| 1,0 | 10 \times 10 | 613,03 |
| 1,5 | 15 \times 10 | 604,14 |
| 2,0 | 20 \times 10 | 584,38 |
| 2,5 | 25 \times 10 | 564,68 |
| 3,0 | 25 \times 10 | 554,29 |

† Pas de temps = 0,1 pour tous les cas.

leigh modifié de 613 correspond à un nombre de Reynolds maximum deux fois plus grand que celui qui correspond à la solution de base en régime incliné. De même, toujours sur la Fig. 4 on remarque qu'à partir d'un nombre de Rayleigh modifié de 613 le nombre de Nusselt haut devient supérieur au nombre de Nusselt bas, autrement dit, le flux de chaleur évacué vers le haut est plus grand que celui évacué vers le bas. Dans le cas du régime permanent en conduction pure, les nombres de Nusselt haut et bas sont égaux à 1. Cette variation des nombres de Nusselt, ainsi que celle du nombre de Reynolds maximum sont donc bien

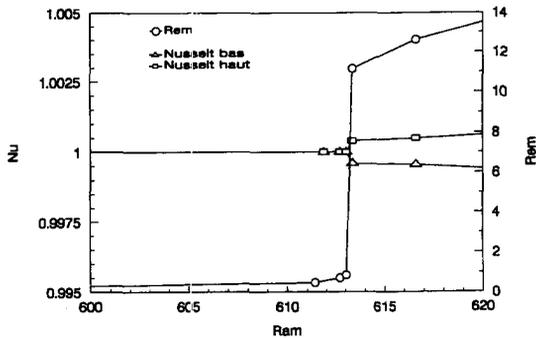


Fig. 4. Nombre de Reynolds maximum et nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh modifié pour le rapport d'aspect $A = 1$. $Ns \rightarrow \infty$.

caractéristiques du déclenchement de l'instabilité. Par ailleurs, on constate sur la Fig. 5 que le temps d'établissement du régime permanent t_e devient maximum

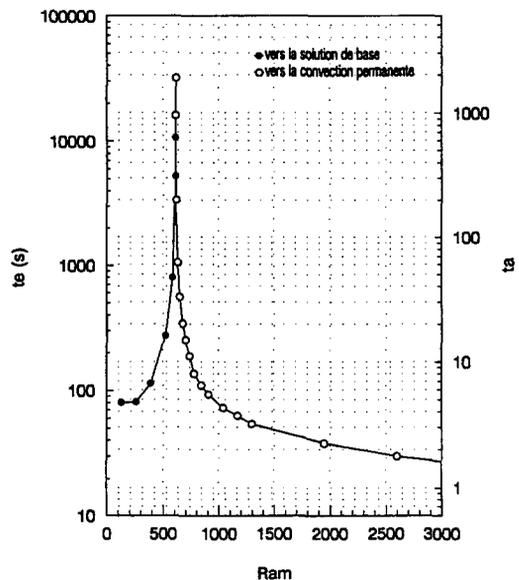


Fig. 5. Temps d'établissement du régime stationnaire sous forme dimensionnelle et adimensionnelle en fonction du nombre de Rayleigh modifié pour le rapport d'aspect $A = 1$. $Ns \rightarrow \infty$.

Tableau 3. Les valeurs des nombres de : Nu_{bas} , Nu_{haut} , Rem , t_e (s) en fonction de Ram pour les points se situant de part et d'autre du Ram de 613. $A = 1$

| Ram | Nu_{bas} | Nu_{haut} | Rem | t_e (s) |
|--------|------------|-------------|-------|-----------|
| 611,41 | 1 | 1 | 0,474 | 5290 |
| 612,71 | 1 | 1 | 0,705 | 10 750 |
| 613,03 | 1 | 1 | 0,857 | 31 980 |
| 613,36 | 0,9996 | 1,0004 | 11,17 | 16 200 |
| 616,60 | 0,9995 | 1,0005 | 12,55 | 3400 |

pour une valeur du nombre de Rayleigh modifié de 613. Une telle évolution du temps d'établissement s'explique par le fait que le mode marginal est stationnaire et donc évolue très lentement au voisinage de la transition. Le Tableau 3 regroupe les valeurs des nombres de : Nu_{bas} , Nu_{haut} , Rem , t_e en fonction de Ram pour les points se situant de part et d'autre du Ram égal à 613. Les deux valeurs de Ram se situant de part et d'autre de 613 permettent de définir un intervalle dans lequel se trouve le nombre de Rayleigh modifié critique $Ramc$. La différence entre les nombres de Nu_{haut} et de Nu_{bas} une fois le $Ramc$ dépassé, ainsi que l'augmentation du Rem permettent de situer également un point par rapport au nombre de Rayleigh modifié critique. Le $Ramc$ est ainsi déterminé par approximation successive en affinant l'intervalle et en adoptant le point milieu de l'intervalle comme valeur du $Ramc$. La procédure est arrêtée quand la largeur de l'intervalle devient inférieure de 0,23% de la valeur du $Ramc$ estimé.

5.2. Validation de la méthode : application au problème de Rayleigh-Bénard entre deux plans parallèles sans et avec source de chaleur

Les valeurs du nombre de Rayleigh critique dans le cas de deux plans parallèles sans et avec source de chaleur ont pu être déterminées par des études analytiques de stabilité dans le cas de deux plans infinis [1] et par des études numériques ou semi-analytiques dans le cas de géométries de dimension finie [7, 10].

Les valeurs du nombre de Rayleigh critique trouvées dans la littérature et déterminées par notre méthode sont reportées dans le Tableau 4 pour le cas du problème sans source de chaleur et dans le Tableau 5 pour le cas du problème avec source de chaleur. Des comparaisons ont été faites pour différents rapports d'aspect (largeur/hauteur de la cavité). Dans le cas d'un rapport d'aspect infini, les calculs ont été menés en prenant une cavité de largeur égale à la longueur d'onde déterminée par l'analyse linéaire [11] et en considérant dans ce cas que les parois verticales sont des frontières libres ($\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$ et $\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ où \mathbf{n} est la normale à la paroi et $\boldsymbol{\tau}$ le tenseur des contraintes visqueuses). Les résultats reportés dans les Tableaux 4 et 5 montrent que nos résultats s'accordent bien avec ceux de la littérature.

5.3. Influence du rapport d'aspect et topologie de l'écoulement en régime permanent

Le nombre de Reynolds maximum et le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh modifié pour différents rapports d'aspect sont représentés sur

Tableau 4. Nombre de Rayleigh critique pour différents rapports d'aspect de la cavité. Validation du code : application au problème de Rayleigh-Bénard entre deux plans sans source de chaleur †

| Rapport d'aspect largeur/hauteur | Ref. [1] semi-analytique | Ref. [7] numérique différences finis | Ref. [10] 3-D profondeur | | Pas de temps = 1,0 †maillage |
|-------------------------------------|-----------------------------|---|------------------------------------|--|------------------------------------|
| | | | hauteur = 12 semi-analytique | Présente étude numérique volumes finis | |
| ∞ | 1708 | | | 1669 | 20 × 10 |
| 1 | | 2460 | 2435 | 2467 | 10 × 10 |
| 2 | | 1840 | 1967 | 1968 | 20 × 10 |
| 3 | | | 1855 | 1794 | 30 × 10 |

† Maillage : nombre de mailles sur la largeur × nombre de mailles sur la hauteur.

‡ Pas de temps = 1,0 pour les cas.

Tableau 5. Source de chaleur critique pour $Ra = 176,936$, $\delta T = 0,71^\circ\text{C} \cong 0^\circ\text{C}$. Validation du code : application au problème de Rayleigh-Bénard entre deux plans avec source de chaleur

| $Ra = 176,936$ $\delta T = 0,71^\circ\text{C} \cong 0^\circ\text{C}$ | Ref. [1] semi-analytique | Présente étude numérique volumes finis | pas de temps = 1,0 †maillage |
|---|-----------------------------|--|------------------------------------|
| Ns critique | 100 | 96 | 20 × 10 |

† Maillage : nombre de mailles sur la largeur × nombre de mailles sur la hauteur.

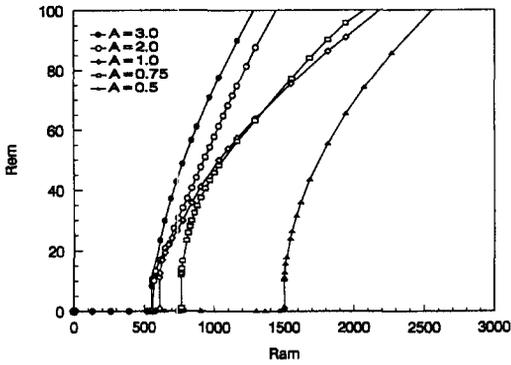


Fig. 6. Nombre de Reynolds maximum en fonction du nombre de Rayleigh modifié pour différents rapports d'aspect.

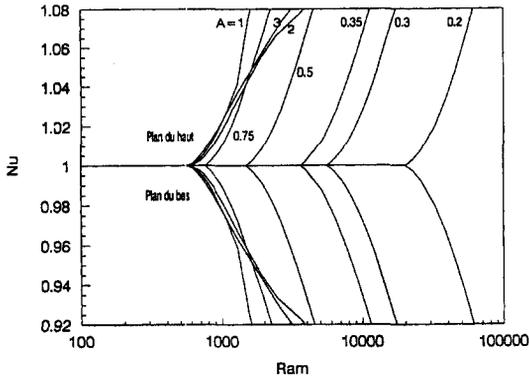


Fig. 7. Nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh modifié pour différents rapports d'aspect. $N_s \rightarrow \infty$.

les Figs. 6 et 7. Le nombre de Rayleigh modifié critique est indépendant du nombre de Prandtl ($Pr = \nu/\lambda$); les branches bifurquées et les nombres de Nusselt sont calculés pour $Pr = 0,1$. La Fig. 7 montre clairement que le flux de chaleur évacué vers le haut est plus grand que celui évacué vers le bas.

Nous avons tracé sur la Fig. 8 le nombre de Rayleigh modifié critique R_{amc} en fonction du rapport d'aspect $A = R/H$. Pour les grands rapports d'aspect, la courbe converge vers l'asymptote horizontale $R_{amc} \cong 580$. L'étude analytique du cas non confiné montre que la condition de transition est $R_{amc} = 583$, ce qui est en bon accord avec le résultat numérique. Comme l'on pourrait s'y attendre, on constate que le confinement est stabilisant. Cette propriété se manifeste fortement pour les rapports d'aspect inférieurs à 0,5. Le cas de l'électrode de sole correspond à faibles valeurs du rapport d'aspect. La valeur du nombre de R_{am} correspondant au point de fonctionnement de l'électrode de sole est de l'ordre de $8,5 \times 10^{10}$, pour un rapport d'aspect de 0,2. Cette valeur du R_{am} est largement supérieure au R_{am} critique qui est égal à 20 148,7 pour ce rapport d'aspect.

La topologie des écoulements axisymétriques en régime stationnaire légèrement au-dessus du nombre de Rayleigh modifié critique ($\varepsilon = R_{am}/R_{amc} - 1 \leq 0,1$) est montrée sur la Fig. 9. Les écoulements sont ascen-

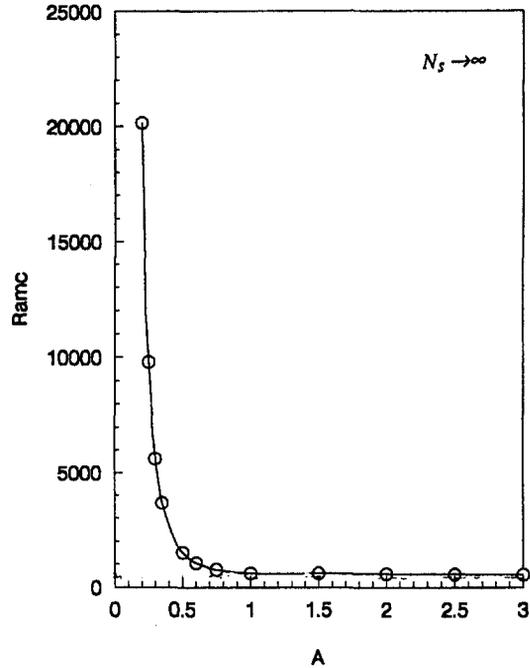


Fig. 8. Nombre de Rayleigh modifié critique en fonction du rapport d'aspect $A = R/H$.

dants sur l'axe où l'intensité de la vitesse est la plus forte.

6. CONCLUSION

L'analyse de la stabilité du régime conductif entre deux plans avec source de chaleur prédit l'existence d'une convection naturelle dans l'électrode de sole d'un four à courant continu. Une étude numérique utilisant la méthode des volumes finis pour la convection thermique du fluide à nombre de Rayleigh nul dans un cylindre avec source interne de chaleur a été effectuée. L'introduction de la perturbation par une très faible inclinaison de la cavité pour l'étude numérique de l'instabilité est validée en comparant les résultats de l'analyse linéaire traditionnelle laquelle consiste à imposer une perturbation de la vitesse initiale. Deux paramètres: le N_s caractérisant a source et le nombre de Rayleigh modifié R_{am} déterminent le seuil du déclenchement de la convection. Lorsque N_s est petit, il faut distinguer les cas où le nombre de Rayleigh est négatif ou positif. Plusieurs critères permettent de localiser la valeur critique du nombre de Rayleigh modifié qui est le seul paramètre permettant la détermination du seuil de l'instabilité thermique lorsque le nombre de Rayleigh est nul ou N_s infini. Il y a un bon accord entre les résultats de l'analyse linéaire dans le cas non confiné et les résultats numériques dans le cas d'un grand rapport d'aspect. Dans le cas du cylindre confiné, les résultats montrent l'effet stabilisant des parois latérales qui devient notable pour des rapports d'aspect inférieurs à 0,5.

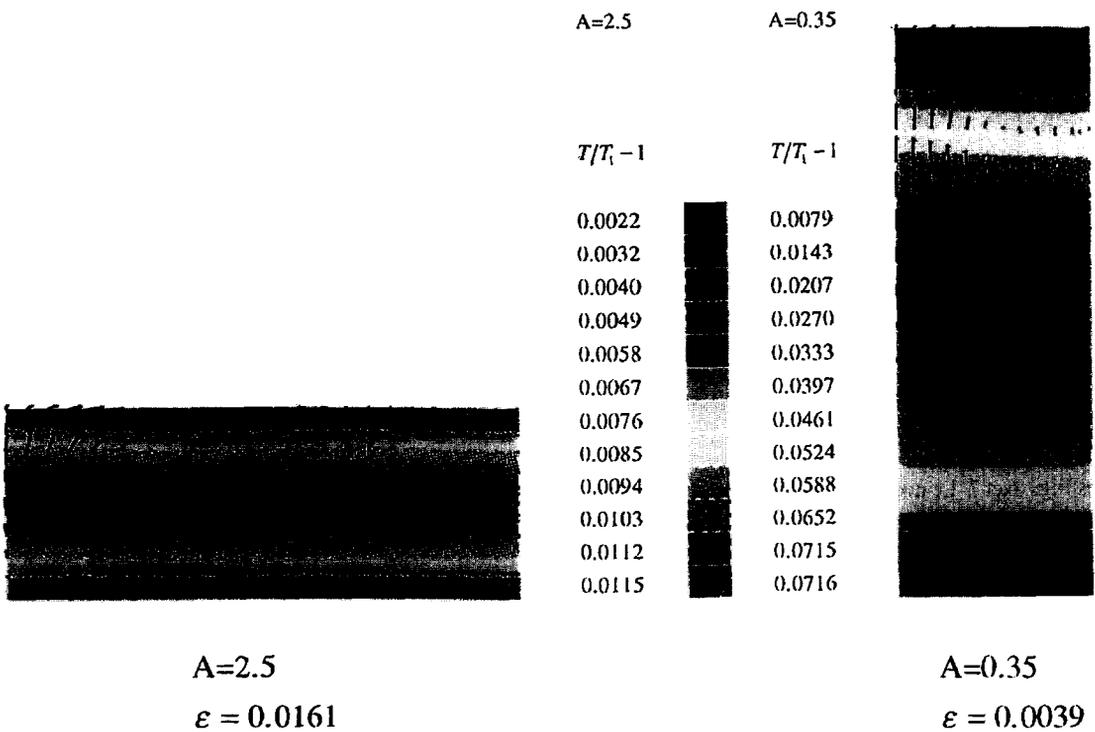
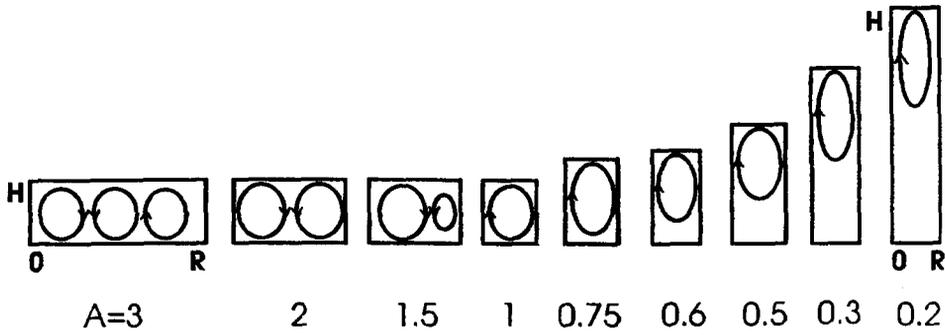


Fig. 9. Topologie des écoulements axisymétriques en régime stationnaire légèrement au-dessus du nombre de Rayleigh modifié critique pour différents rapports d'aspect. $Ns \rightarrow \infty$. $A = 2,5$ et 3 , on a 3 cellules verticales. $A = 1,5$ et 2 , 2 cellules verticales. $A = 1$, 1 cellule verticale. $A < 0,5$, 1 cellule radiale. $A = 2,5$, $\epsilon = 0,0161$, $Rem = 13,50$. $A = 0,35$, $\epsilon = 0,0039$, $Rem = 14,67$.

RÉFÉRENCES

1. Sparrow, E. M., Goldstein, R. J. and Jonsson, V. K., Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and nonlinear temperature profile. *Journal of Fluid Mechanics*, 1964, **18**, 513–528.
2. Tritton, D. J. and Zarraga, N., Convection in horizontal layers with internal heat generation. Experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, **30**, 21–37.
3. Robert, P. H., Convection in horizontal layers with internal heat generation—theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, **30**, 33–49.
4. Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, Washington, DC, 1980.
5. Charlson, G. S. and Sani, R. L., On thermoconvective instability in a bounded cylindrical fluid layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1971, **14**, 2157–2160.
6. Buell, J. C. and Catton, I., The effect of wall conduction on the stability of a fluid in a right circular cylinder heated from below. *Transactions of the ASME Journal of Heat Transfer*, 1983, **105**, 255–260.
7. Samuels, M. R. and Churchill, S. W., Stability of a fluid in a rectangular region heated from below. *A.I.Ch.E. Journal*, 1967, **13**, 77–85.
8. Aziz, K. and Hellums, J. D., Numerical solution of the three-dimensional equations of motion for laminar natural convection. *Physics of Fluids*, 1967, **10**, 314–324.

9. Fromm, J. E., Numerical solutions of the nonlinear equations for a heated fluid layer. *Physics of Fluids*, 1965, **8**, 1757–1769.
10. Catton, I., The effect of insulating vertical walls on the onset of motion in a fluid heated from below. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1972, **15**, 665–672.
11. Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Clarendon Press, Oxford, 1961.
12. Wu, K., Sur l'instabilité thermo-convective avec source de chaleur interne. Thèse INPL Nancy, France, 1995.

THERMAL INSTABILITY IN A CIRCULAR CYLINDER WITH INTERNAL HEAT GENERATION

Abstract—The thermal convection of a fluid with a Rayleigh number of zero, induced by internal heat generation in a bounded cylinder, is studied numerically. The appearance of the convection can be forecast by the analysis of the heat transfer and the stability of the conductive regime between two plates. The numerically determined critical modified Rayleigh number for a large aspect ratio is in good agreement with the linear stability analysis of the infinite fluid layer. The perturbation introduced by a small inclination of the cylinder for the numerical instability study leads to the same results as that of an imposed perturbation velocity in the linear case. The stabilisation due to the confinement appears strongly for an aspect ratio of less than 0.5. Copyright © 1996 Elsevier Science Ltd.